

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TÂY NINH
TRƯỜNG THPT TÂN CHÂU
----- * -----

**ĐỀ CƯƠNG
GIỮA HỌC KÌ II TOÁN 12**



**TỔ: TOÁN
Năm học: 2020-2021**

I. NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN- ỨNG DỤNG

1. Công thức nguyên hàm:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

- $\int k \cdot f(x)dx = k \int f(x)dx$ ▪ $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ ▪ $\int f'(x)dx = f(x) + C$
- 1) $\int kdx = kx + C$ ▪ $\int 2dx = 2x + C$ ▪ $\int (-3)dx = -3x + C$
- 2) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ ▪ $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$ ▪ $\int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$
- $\xrightarrow{MR} \int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ ▪ $\int (1-2x)^{10} dx = \frac{1}{-2} \cdot \frac{(1-2x)^{11}}{11} + C = \frac{(1-2x)^{11}}{-22} + C$
- 3) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \xrightarrow{MR} \int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C$ ▪ $\int \frac{1}{1-3x} dx = \frac{1}{-3} \ln|1-3x| + C$
- 4) $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C \xrightarrow{MR} \int \frac{1}{(ax+b)^2} dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{-1}{ax+b} + C$ ▪ $\int \frac{1}{(2x-3)^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2x-3} + C = -\frac{1}{4x-6} + C$
- $\int \left(x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - 10\right) dx = \frac{x^3}{3} + \ln|x| - \frac{1}{x} - 10x + C$ ▪ $\int \frac{x^5+1}{x} dx = \int \left(x^4 + \frac{1}{x}\right) dx = \frac{x^5}{5} + \ln|x| + C$
- 5) $\int e^x dx = e^x + C \xrightarrow{MR} \int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$ ▪ $\int e^{-x} dx = \frac{1}{-1} e^{-x} + C = -e^{-x} + C$
- 6) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ ▪ $\int 5^x dx = \frac{5^x}{\ln 5} + C$ ▪ $\int 3^{2x} dx = \int 9^x dx = \frac{9^x}{\ln 9} + C$
- $\xrightarrow{MR} \int a^{bx+c} dx = \frac{1}{b} \cdot \frac{a^{bx+c}}{\ln a} + C$ ▪ $\int 3^{2x+5} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{3^{2x+5}}{\ln 3} + C = \frac{3^{2x+5}}{2 \ln 3} + C$
- $\int (e^{x-1} - 2)e^x dx = \int (e^{2x-1} - 2e^x) dx = \frac{1}{2} e^{2x-1} - 2e^x + C$ ▪ $\int 2^x \cdot 3^{x-1} dx = \int 2^x \cdot 3^x \cdot \frac{1}{3} dx = \frac{1}{3} \int 6^x dx = \frac{6^x}{3 \ln 6} + C$
- 7) $\int \sin x dx = -\cos x + C$ ▪ $\int \sin\left(4x - \frac{\pi}{2}\right) dx = -\frac{1}{4} \cos\left(4x - \frac{\pi}{2}\right) + C$
 $\xrightarrow{MR} \int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$ $a=4; b=-\frac{\pi}{2}$
- 8) $\int \cos x dx = \sin x + C$ ▪ $\int \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) dx = \frac{1}{-1} \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + C = -\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + C$
 $\xrightarrow{MR} \int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$ $a=-1; b=\frac{\pi}{3}$
- $\int (3\sin x - 2\cos x) dx = -3\cos x - 2\sin x + C$ ▪ $\int \sin^2 x dx = \int \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C$
- 9) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x + C$ ▪ $\int \frac{1-2\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 2\right) dx = \tan x - 2x + C$

$$\begin{aligned} &\xrightarrow{MR} \int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C & \int \frac{1}{\cos^2 3x} dx = \frac{1}{3} \tan 3x + C \\ &\xrightarrow{MR} \int [1 + \tan^2(ax+b)] dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C & \int \left[1 + \tan^2 \underbrace{(\pi - 2x)}_{a=-2; b=\pi} \right] dx = \frac{1}{-2} \tan(\pi - 2x) + C \\ 10) &\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int (1 + \cot^2 x) dx = -\cot x + C & \int \frac{x \sin^2 x + 1}{\sin^2 x} dx = \int \left(x + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = \frac{x^2}{2} - \cot x + C \\ &\xrightarrow{MR} \int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C & \int \frac{1}{\sin^2 8x} dx = -\frac{1}{8} \cot 8x + C \\ &\xrightarrow{MR} \int [1 + \cot^2(ax+b)] dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C & \int (1 + \cot^2 3x) dx = -\frac{1}{3} \cot 3x + C \\ &\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = \tan x - \cot x + C \end{aligned}$$

2. Tích phân:

a) **Định nghĩa:** $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$ với $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a; b]$.

b) **Tính chất:**

$\int_a^a f(x) dx = 0$	$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$
$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$ (k là hằng số)	$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$
$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$	$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du$
Nếu $f(x) \geq 0, \forall x \in [a; b]$ thì $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.	
Nếu $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a; b]$ thì $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$.	
Đặc biệt: - Nếu hàm $y = f(x)$ là hàm số lẻ trên $[-a; a]$ thì $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$. - Nếu hàm $y = f(x)$ là hàm số chẵn trên $[-a; a]$ thì $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.	

3. Phương pháp tính tích phân:

a) **Phương pháp tích phân từng phần:**

Quy tắc chung: $I = \int_a^b u \cdot dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$. Ta xét các dạng phổ biến sau:

❖ Dạng $\int_a^b P(x).Q(x).dx$ với $P(x)$ là đa thức đại số, $Q(x)$ là hàm lượng giác hoặc hàm mũ.

$$\xrightarrow{PP} \begin{cases} u = P(x) \\ dv = Q(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = P'(x) dx \\ v = \int Q(x) dx \end{cases}$$

☞ Lưu ý: $v = \int Q(x) dx$ nên kết quả có dạng $R(x) + C$, ta chủ động chọn 1 giá trị C có lợi cho tính toán sau này.

Minh họa:

$$\blacksquare I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-1) \sin x dx .$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 2x-1 \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dx \\ v = \int \sin x dx = \underbrace{-\cos x}_{\text{chọn } C=0} \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } I = \int_a^b u.dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du \\ = -(2x-1) \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos x dx = \dots$$

$$\blacksquare J = \int_0^1 (1-x) e^{2x} dx .$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 1-x \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -dx \\ v = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases} \quad \text{chọn } C=0$$

$$J = \frac{1}{2} (1-x) e^{2x} \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{2} e^{2x} dx = \dots$$

❖ Dạng $\int_a^b P(x).Q(x).dx$ với $P(x)$ là đa thức đại số hoặc phân thức, $Q(x)$ là hàm logarit.

$$\xrightarrow{PP} \begin{cases} u = Q(x) \\ dv = P(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = Q'(x) dx \\ v = \int P(x) dx \end{cases}$$

Minh họa:

$$\blacksquare I = \int_1^e x^2 \ln x dx .$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \end{cases}$$

$$I = \frac{x^3}{3} \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} \int_1^e x^2 dx = \dots$$

$$\blacksquare J = \int_1^e \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx .$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{1}{(x+1)^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = -\frac{1}{x+1} + 1 = \frac{x}{x+1} \end{cases} \quad \text{chọn } C=1$$

$$J = \frac{x}{x+1} \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x}{x+1} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{e}{e+1} - \ln|x+1| \Big|_1^e = \dots$$

b) Phương pháp tích phân đổi biến:

❖ **Đổi biến loại 1:** Xét tích phân dạng $I = \int_a^b f[u(x)].u'(x) dx$.

—^{PP}→ Đặt $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x)dx$. Đổi cận: $x = a \Rightarrow t_1 = u(a)$, $x = b \Rightarrow t_2 = u(b)$.

Khi đó tích phân cần tính là: $I = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$. Ta xét các dạng phổ biến sau:

1) Dạng $I = \int_a^b f(x^n) \boxed{x^{n-1}dx}$. —^{PP}→ $t = \alpha x^n + \beta$ (hoặc $t = x^n$)	$I = \int_0^1 \frac{1}{x^3+1} \boxed{x^2dx}$ - Đặt $t = x^3 + 1 \Rightarrow dt = 3 \boxed{x^2dx} \Rightarrow \boxed{x^2dx} = \frac{1}{3} dt$. - Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1$, $x = 1 \Rightarrow t = 2$. - Ta có: $I = \int_1^2 \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{3} dt = \dots\dots$
2) Dạng $I = \int_a^b f(\sqrt[n]{u}) \cdot \boxed{u' \cdot dx}$. —^{PP}→ $t = \sqrt[n]{u} \Rightarrow t^n = u$.	$I = \int_0^{\sqrt[3]{7}} \sqrt[3]{x^2+1} \cdot \boxed{xdx}$ - Đặt $t = \sqrt[3]{x^2+1} \Rightarrow t^3 = x^2+1 \Rightarrow 3t^2 dt = 2 \boxed{xdx}$ $\Rightarrow \boxed{xdx} = \frac{2}{3} t^2 dt$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1$, $x = \sqrt{7} \Rightarrow t = 2$. $I = \int_1^2 t \cdot \frac{2}{3} t^2 dt = \frac{2}{3} \int_1^2 t^3 dt = \dots\dots$
3) Dạng $I = \int_a^b f\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \boxed{\frac{1}{x^2} \cdot dx}$. —^{PP}→ $t = \alpha \cdot \frac{1}{x} + \beta$ hay $t = \frac{1}{x}$; $t = \sqrt[n]{\alpha \frac{1}{x} + \beta}$ v.v...	$I = \int_1^4 \sqrt{1 - \frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} dx$ - Đặt $t = \sqrt{1 - \frac{1}{x}} \Rightarrow t^2 = 1 - \frac{1}{x} \Rightarrow 2t dt = \frac{1}{x^2} dx$. - Ta có: $I = 2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} t^2 \cdot dt = \dots\dots$
4) Dạng $I = \int_a^b f(\sqrt{x}) \cdot \boxed{\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot dx}$. —^{PP}→ $t = \alpha \sqrt{x} + \beta$ hay $t = \sqrt{x} \dots$	$I = \int_1^4 \frac{1}{(\sqrt{x}+1)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ - Đặt $t = \sqrt{x} + 1 \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \Rightarrow 2dt = \frac{1}{\sqrt{x}} dx$. - Ta có: $I = \int_2^3 \frac{1}{t^2} \cdot 2dt = \dots\dots$
5) Dạng $I = \int_a^b f(e^x) \cdot \boxed{e^x \cdot dx}$. —^{PP}→ $t = \alpha e^x + \beta$ hay $t = e^x$.	$I = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^x+1} dx \longrightarrow I = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1} e^x dx$. - Đặt $t = e^x + 1 \Rightarrow \begin{cases} dt = e^x dx \\ e^x = t - 1 \end{cases}$. Khi đó: $I = \int_2^{e+1} \frac{t-1}{t} dt$. $I = \int_2^{e+1} \left(1 - \frac{1}{t}\right) dt = \dots\dots$
6) Dạng $I = \int_a^b f(\ln x) \cdot \boxed{\frac{1}{x} \cdot dx}$.	$I = \int_1^{e^2} \frac{2 \ln x - 1}{x} dx \longrightarrow I = \int_1^{e^2} (2 \ln x - 1) \cdot \frac{1}{x} dx$.

$\xrightarrow{PP} t = \alpha \ln x + \beta$ hay $t = \ln x$.	- Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$. - Khi đó $I = \int_0^2 (2t-1) dt = \left(t^2 - t \right) \Big _0^2 = \dots\dots$
7) Dạng $I = \int_a^b f(\sin x) \cdot \boxed{\cos x dx}$ $\xrightarrow{PP} t = \alpha \sin x + \beta$ hay $t = \sin x$.	$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2\sin x} dx$ - Đặt $t = 1+2\sin x \Rightarrow dt = 2\cos x dx \Rightarrow \frac{1}{2} dt = \cos x dx$. - Khi đó $I = \int_1^3 \frac{\frac{1}{2} dt}{t} = \frac{1}{2} \ln t \Big _1^3 = \dots\dots$
8) Dạng $I = \int_a^b f(\cos x) \cdot \boxed{\sin x dx}$ $\xrightarrow{PP} t = \alpha \cos x + \beta$ hay $t = \cos x$	$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2x - \cos x + 1) \sin x dx$ $\longrightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos^2 x - \cos x) \sin x dx$. - Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx \Rightarrow -dt = \sin x dx$. - Khi đó: $I = \int_1^0 (2t^2 - t)(-dt) = \int_0^1 (2t^2 - t) dt = \dots\dots$
9) Dạng $I = \int_a^b f(\tan x) \cdot \boxed{\frac{1}{\cos^2 x} dx}$ $\xrightarrow{PP} t = \alpha \tan x + \beta$ hay $t = \tan x$.	$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan^3 x}{\cos^2 x} dx$ - Đặt $t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx$. - Khi đó: $I = \int_0^{\sqrt{3}} t^3 dt = \dots\dots$
10) Dạng $I = \int_a^b f(\cot x) \cdot \boxed{\frac{1}{\sin^2 x} dx}$ $\xrightarrow{PP} t = \alpha \cot x + \beta$ hay $t = \cot x$.	$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cot^2 x - 1}{\cot x \cdot \sin^2 x} dx \longrightarrow I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cot^2 x - 1}{\cot x} \cdot \frac{1}{\sin^2 x} dx$. - Đặt $t = \cot x \Rightarrow dt = -\frac{1}{\sin^2 x} dx \Rightarrow -dt = \frac{1}{\sin^2 x} dx$. $I = \int_1^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{t^2 - 1}{t} (-dt) = \dots\dots$
11) Dạng $I = \int_a^b f \left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \right) \boxed{\sin 2x dx}$ $\xrightarrow{PP} \begin{cases} t = \sin^2 x \\ t = \cos^2 x \\ t = \cos 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dt = \sin 2x dx \\ dt = -\sin 2x dx \\ dt = -2\sin 2x dx \end{cases}$	$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin^2 x + 3) \sin 2x dx$ - Đặt $t = \sin^2 x \Rightarrow dt = 2\sin x(\sin x)' dx = \sin 2x dx$. - Ta có: $I = \int_0^{\frac{1}{2}} (t+3) dt = \dots\dots$

❖ **Đổi biến loại 2:** Xét tích phân dạng $I = \int_a^b f(x) dx$ trong đó $f(x)$ phức tạp và không thể tính

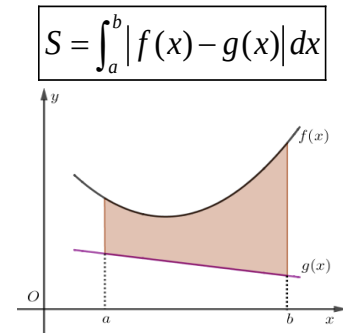
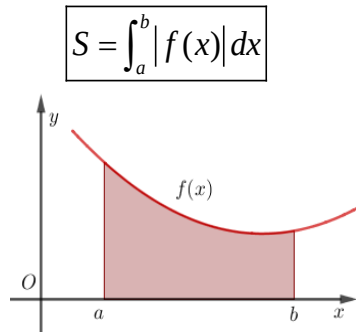
nguyên hàm trực tiếp. **Đổi biến loại 2** là ta đặt: $x = u(t) \Rightarrow dx = u'(t)dt$. Ta xét 4 dạng phổ biến sau:

1) Dạng $I = \int_{x_1}^{x_2} f(\sqrt{a^2 - x^2})dx$. $\xrightarrow{PP} x = a \sin t$ (hay $x = a \cos t$).	$I = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$ - Đặt $x = 2 \sin t \Rightarrow dx = 2 \cos t dt$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0, x = 2 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$. Ta có: $\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4\sin^2 t} = \sqrt{4\cos^2 t} = 2 \cos t$ ≥ 0 do $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. - Ta có: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos t dt}{2 \cos t} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$.
2) Dạng $I = \int_{x_1}^{x_2} f(\sqrt{a^2 + x^2})dx$ hay $\int_{x_1}^{x_2} f\left(\frac{1}{a^2 + x^2}\right)dx$. $\xrightarrow{PP} x = a \tan t$.	$I = \int_0^3 \frac{1}{x^2 + 9} dx$ - Đặt $x = 3 \tan t \Rightarrow dx = 3(1 + \tan^2 t)dt$. - Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0, x = 3 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$. - Khi đó: $x^2 + 9 = 9 \tan^2 t + 9 = 9(\tan^2 t + 1)$. - Vậy $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3(1 + \tan^2 t)dt}{9(\tan^2 t + 1)} = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = \frac{\pi}{12}$.
3) Dạng $I = \int_{x_1}^{x_2} f(\sqrt{x^2 - a^2})dx$ $\xrightarrow{PP} x = \frac{a}{\sin t}$ hay $x = \frac{a}{\cos t}$	$I = \int_2^4 \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} dx$ - Đặt $x = \frac{2}{\cos t} \Rightarrow dx = \frac{2 \sin t}{\cos^2 t} dt$. - Đổi cận: $x = 2 \Rightarrow t = 0, x = 4 \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}$. - Khi đó: $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\frac{4}{\cos^2 t} - 4}}{\frac{2}{\cos t}} \cdot \frac{2 \sin t}{\cos^2 t} dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^2 t \cdot dt$ $= 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 t} - 1 \right) \cdot dt = 2 \left(\tan t - t \right) \Big _0^{\frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}$.
4) Dạng $I = \int_{x_1}^{x_2} f\left(\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\right)dx$ $\xrightarrow{PP} x = a \cos 2t$.	$I = \int_0^2 \sqrt{\frac{2-x}{2+x}} dx$ - Đặt $x = 2 \cos 2t \Rightarrow dx = -4 \sin 2t \cdot dt = -8 \sin t \cdot \cos t \cdot dt$ - Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}, x = 2 \Rightarrow t = 0$.

	Ta có: $\sqrt{\frac{2-x}{2+x}} = \sqrt{\frac{2-2\cos 2t}{2+2\cos 2t}} = \sqrt{\frac{1-\cos 2t}{1+\cos 2t}} = \frac{\sin t}{\cos t}.$ • $I = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t}{\cos t} \sin t \cdot \cos t dt = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t dt = \dots$
--	---

4. Ứng dụng tích phân để tính diện tích – thể tích:

- Hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục Ox , $x = a$, $x = b$ thì có diện tích:
- Hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$ thì có diện tích:



- Khi xoay hình phẳng $\begin{cases} y = f(x) \\ x = a, x = b \end{cases}$ quanh Ox , ta được khối trụ tròn có thể tích
- Khi xoay hình phẳng $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \\ x = a, x = b \end{cases}$ quanh Ox , được khối trụ tròn có thể tích

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

$$V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx.$$

- Xét hình khối được giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = a$, $x = b$. Khi cắt khối này ta được thiết diện có diện tích $S(x)$ (là hàm liên tục trên $[a; b]$). Thể tích khối này trên $[a; b]$ là: $V = \int_a^b S(x) dx$.

5. Công thức chuyển động:

Xét hàm quãng đường $S(t)$, hàm vận tốc $v(t)$ và hàm gia tốc $a(t)$. Ba hàm này sẽ biến thiên theo t .

- $S(t) = \int v(t) dt \Leftrightarrow v(t) = S'(t)$
- $v(t) = \int a(t) dt \Leftrightarrow a(t) = v'(t)$

*BÀI TẬP ÁP DỤNG BÀI 1: NGUYÊN HÀM MỨC ĐỘ: NHẬN BIẾT.

Câu 1: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 2x$ là

A. $\int \cos 2x dx = 2 \sin 2x + C.$

B. $\int \cos 2x dx = -\frac{1}{2} \sin 2x + C.$

C. $\int \cos 2x dx = \sin 2x + C.$

D. $\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C.$

Câu 2: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3^x + 1$ là

A. $\frac{3^x}{\ln 3} + C$

B. $\frac{3^x}{\ln 3} + x + C$

C. $3^x + x + C$

D. $3^x \ln x + x + C$

- Câu 3:** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 2x + \cos x$ là
 A. $-\cos 2x + \sin x + C$ B. $\cos^2 x - \sin x + C$ C. $\sin^2 x + \sin x + C$ D. $\cos 2x - \sin x + C$
- Câu 4:** Cho hàm số $f(x) = 4x^3 + 2x + 1$. Tìm $\int f(x)dx$.
 A. $\int f(x)dx = 12x^4 + 2x^2 + x + C$ B. $\int f(x)dx = 12x^2 + 2$
 C. $\int f(x)dx = x^4 + x^2 + x + C$ D. $\int f(x)dx = 12x^2 + 2 + C$
- Câu 5:** Mệnh đề nào sau đây **sai**?
 A. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$, với mọi hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$
 B. $\int f'(x)dx = f(x) + C$, với mọi hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$
 C. $\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$, với mọi hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$
 D. $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$, với mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và mọi số thực k
- Câu 6:** Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x + \cos x$ là
 A. $\sin x + \cot x + C$ B. $\sin x + \cos x + C$ C. $\sin x - \cos x + C$ D. $\cos x - \sin x + C$
- Câu 7:** Trong các khẳng định dưới đây, có bao nhiêu khẳng định đúng?
 (1): Mọi hàm số liên tục trên $[a; b]$ đều có đạo hàm trên $[a; b]$.
 (2): Mọi hàm số liên tục trên $[a; b]$ đều có nguyên hàm trên $[a; b]$.
 (3): Mọi hàm số đạo hàm trên $[a; b]$ đều có nguyên hàm trên $[a; b]$.
 (4): Mọi hàm số liên tục trên $[a; b]$ đều có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $[a; b]$.
 A. 2. B. 3 C. 1 D. 4
- Câu 8:** Hàm số nào dưới đây là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x} - 1$ trên $(0; +\infty)$.
 A. $F(x) = \frac{2}{3}\sqrt[3]{x^2} - x + 1$ B. $F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - x + 2$
 C. $F(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ D. $F(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - x$
- Câu 9:** Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x - \cos x$.
 A. $\int f(x)dx = -\sin x + \cos x + C$. B. $\int f(x)dx = \sin x + \cos x + C$.
 C. $\int f(x)dx = -\sin x - \cos x + C$. D. $\int f(x)dx = \sin x - \cos x + C$.
- Câu 10:** Tính $\int \sin 3x dx$
 A. $-\cos 3x + C$. B. $-\frac{1}{3}\cos 3x + C$. C. $\frac{1}{3}\cos 3x + C$. D. $\cos 3x + C$.
- MỨC ĐỘ: THÔNG HIỂU.**
- Câu 11:** Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x(x+1)$.
 A. $x(x+1) + C$. B. $2x+1+C$. C. $x^3 + x^2 + C$. D. $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$.
- Câu 12:** Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin 2x$, biết $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$.

A. $F(x) = \frac{-1}{2} \cos 2x + \frac{\pi}{6}$

B. $F(x) = \cos^2 x - \frac{1}{4}$

C. $F(x) = \sin^2 x - \frac{1}{4}$

D. $F(x) = \frac{-1}{2} \cos 2x$

Câu 13: Hàm số $F(x) = \ln|\sin x - 3\cos x|$ là một nguyên hàm của hàm số nào trong các hàm số sau đây?

A. $f(x) = \frac{\sin x - 3\cos x}{\cos x + 3\sin x}$

B. $f(x) = \frac{-\cos x - 3\sin x}{\sin x - 3\cos x}$

C. $f(x) = \frac{\cos x + 3\sin x}{\sin x - 3\cos x}$

D. $f(x) = \cos x + 3\sin x$

Câu 14: Cho biết $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x - \frac{1}{x}$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{(x^2 + a)^2}{x^2}$. Tìm nguyên hàm của $g(x) = x \cos ax$.

A. $x \sin x - \cos x + C$

B. $\frac{1}{2}x \sin 2x - \frac{1}{4} \cos 2x + C$

C. $x \sin x + \cos x + C$

D. $\frac{1}{2}x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C$

Câu 15: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{3x-1}{x+2}$, $f(0) = 1$ và $f(-4) = 2$. Giá trị của biểu thức $f(2) + f(-6)$ bằng

A. $10 - \ln 2$

B. $3 - 14 \ln 2$

C. $3 + 14 \ln 2$

D. $10 + \ln 2$

Câu 16: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \cos 3x \cdot \cos x$, biết đồ thị hàm số $y = F(x)$ đi qua gốc tọa độ.

A. $F(x) = \frac{\cos 4x}{8} + \frac{\cos 2x}{4}$

B. $F(x) = \frac{\sin 4x}{8} + \frac{\sin 2x}{4}$

C. $F(x) = \frac{\sin 8x}{8} + \frac{\sin 4x}{4}$

D. $F(x) = \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 2x}{2}$

MỨC ĐỘ: VẬN DỤNG THẤP.

Câu 17: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\sqrt{x} \cdot f'(x) = -f(x)$, $\forall x \geq 1$ và $f(e) = -\frac{1}{2}$. Tính $f(e^2)$.

A. $f(e^2) = \frac{1}{3}$

B. $f(e^2) = -\frac{1}{4}$

C. $f(e^2) = \frac{1}{4}$

D. $f(e^2) = -\frac{1}{3}$

Câu 18: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(0; +\infty) \setminus \{e\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x(\ln x - 1)}$, $f\left(\frac{1}{e^2}\right) = \ln 6$ và

$f(e^2) = 3$. Giá trị của biểu thức $f\left(\frac{1}{e}\right) + f(e^3)$ bằng

A. $3 \ln 2 + 1$

B. $2 \ln 2$

C. $3(\ln 2 + 1)$

D. $\ln 2 + 3$

Câu 19: Cho hàm số $f(x) \neq 0$; $f'(x) = (2x+1) \cdot f^2(x)$ và $f(1) = -0,5$.

Tính tổng $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2017) = \frac{a}{b}$; $(a \in \mathbb{Z}; b \in \mathbb{N})$ với $\frac{a}{b}$ tối giản. Chọn khẳng định

đúng

A. $\frac{a}{b} < -1$. B. $a \in (-2017; 2017)$. C. $b - a = 4035$. D. $a + b = -1$.

- Câu 20:** Cho $f(x) = \frac{x}{\cos^2 x}$ trên $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $xf'(x)$ thỏa mãn $F(0) = 0$. Biết $a \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ thỏa mãn $\tan a = 3$. Tính $F(a) - 10a^2 + 3a$.
- A. $-\frac{1}{2}\ln 10$. B. $-\frac{1}{4}\ln 10$. C. $\frac{1}{2}\ln 10$. D. $\ln 10$.

BÀI 2: TÍCH PHÂN.

LOẠI 1. ĐỊNH NGHĨA, TÍNH CHẤT VÀ TÍCH PHÂN CƠ BẢN. MỨC ĐỘ: NHẬN BIẾT.

- Câu 1:** Cho $\int_{-1}^2 f(x)dx = 2$ và $\int_{-1}^2 g(x)dx = -1$. Tính $I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) + 3g(x)]dx$ bằng
- A. $I = \frac{11}{2}$. B. $I = \frac{7}{2}$. C. $I = \frac{17}{2}$. D. $I = \frac{5}{2}$.

- Câu 2:** Tính tích phân $I = \int_0^2 \sqrt{4x+1} dx$.

A. 13 B. $\frac{13}{3}$ C. 4 D. $\frac{4}{3}$

- Câu 3:** Nếu $\int_a^d f(x)dx = 5$ và $\int_d^b f(x)dx = 2$ ($a < d < b$). Tích phân $\int_a^b f(x)dx$ bằng
- A. 10. B. 7. C. -3. D. 3.

- Câu 4:** Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên đoạn $[1; 3]$, thỏa mãn:

$\int_1^3 [f(x) + 3g(x)]dx = 10$ và $\int_1^3 [2f(x) - g(x)]dx = 6$. Tính $\int_1^3 [f(x) + g(x)]dx$.

A. $I = 8$. B. $I = 9$. C. $I = 6$. D. $I = 7$.

- Câu 5:** Cho $\int_0^3 f(x)dx = 2$ và $\int_0^3 g(x)dx = 3$. Tính giá trị của tích phân $L = \int_0^3 [2f(x) - g(x)]dx$.
- A. $L = 4$. B. $L = -1$. C. $L = -4$. D. $L = 1$.

- Câu 6:** Cho $\int_{-2}^1 f(x)dx = 3$. Tính tích phân $\int_{-2}^1 [2f(x) - 1]dx$.

A. 3. B. -9. C. 5. D. -3.

- Câu 7:** Cho $f(x), g(x)$ là các hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau đây.

A. $\int_a^b f(x).g(x)dx = \int_a^b f(x)dx . \int_a^b g(x)dx$. B. $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

C. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ ($a < c < b$). D. $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$.

MỨC ĐỘ: THÔNG HIỂU.

- Câu 8:** Biết $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x+2}+(x+2)\sqrt{x}} = \sqrt{a} + \sqrt{b} - c$ với a, b, c là các số nguyên dương. Tính $P = a + b + c$.
- A. $P = 2$. B. $P = 8$. C. $P = 46$. D. $P = 22$.
- Câu 9:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int_0^1 f(x)dx = 2$; $\int_1^3 f(x)dx = 6$. Tính $I = \int_0^3 f(x)dx$.
- A. $I = 8$ B. $I = 12$ C. $I = 36$ D. $I = 4$
- Câu 10:** Cho $\int_{-1}^2 f(x)dx = 2$, $\int_{-1}^7 f(t)dt = 9$. Giá trị của $\int_2^7 f(z)dz$ là
- A.11 B.5 C.7 D.9
- Câu 11:** Cho tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4x - 1 + \cos x)dx = \pi \left(\frac{\pi}{a} - \frac{1}{b} \right) + c$, $(a, b, c \in \mathbb{Q})$. Tính $a - b + c$
- A. $\frac{1}{2}$. B.1. C.-2. D. $\frac{1}{3}$.
- Câu 12:** Biết $\int_1^2 \frac{x}{(x+2)(x+4)}dx = a \ln 3 + b \ln 4 + c \ln 5 + d \ln 6$ ($a, b, c, d \in \mathbb{Z}$). Tính giá trị của biểu thức $T = 2a + 3b - c - \frac{d}{2}$.
- A. $T = 2$. B. $T = 5$. C. $T = 0$. D. $T = 3$.
- Câu 13:** Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $\mathbb{R}$ và số thực a dương thỏa $\int_0^a f(x)dx = 3$.
 Tính $I = \int_{-a}^a (f(x) - x)dx$.
- A. $I = 3$. B. $I = 6$. C. $I = 0$. D. $I = 9$.
- Câu 14:** Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn điều kiện $f(1) = 12$, $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_1^4 f'(x)dx = 17$.
 Khi đó $f(4)$ bằng
- A.5 B.29 C.19 D.9
- Câu 15:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;10]$ và $\int_0^{10} f(x)dx = 7$ và $\int_2^6 f(x)dx = 3$. Tính $P = \int_0^2 f(x)dx + \int_6^{10} f(x)dx$.
- A. $P = 7$. B. $P = -4$. C. $P = 4$. D. $P = 10$.
- Câu 16:** Giả sử $\int_1^5 \frac{dx}{2x-1} = \ln c$, với c là số nguyên. Giá trị của c là
- A.3. B.4. C.16. D.9.

MỨC ĐỘ: VẬN DỤNG THẤP.

Câu 17: Biết $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x + x \cos x - \sin^3 x}{1 + \cos x} dx = \frac{\pi^2}{a} - \frac{b}{c}$. Trong đó a, b, c là các số nguyên dương, phân số $\frac{b}{c}$ tối giản. Tính $T = a^2 + b^2 + c^2$.

A. $T = 16$ **B.** $T = 59$ **C.** $T = 69$ **D.** $T = 50$

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1+2x) + f(1-2x) = \frac{x^2}{x^2+1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int_{-1}^3 f(x) dx$.

A. $I = 2 - \frac{\pi}{2}$. **B.** $I = 1 - \frac{\pi}{4}$. **C.** $I = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}$. **D.** $I = \frac{\pi}{4}$.

Câu 19: Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn điều kiện $4x.f(x^2) + 3f(1-x) = \sqrt{1-x^2}$. Tích phân $I = \int_0^1 f(x) dx$ bằng:

A. $I = \frac{\pi}{4}$ **B.** $I = \frac{\pi}{6}$ **C.** $I = \frac{\pi}{20}$ **D.** $I = \frac{\pi}{16}$

MỨC ĐỘ: VẬN DỤNG CAO.

Câu 20: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[0; +\infty)$ và $\int_0^{x^2} f(t) dt = x.e^x$. Tính giá trị $f(4)$.

A. $f(4) = 3.e^2$. **B.** $f(4) = \frac{3.e^2}{4}$. **C.** $f(4) = \frac{5.e^2}{8}$. **D.** $f(4) = \frac{e^2}{4}$.

Câu 21: Cho tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt x_1, x_2 . Tính tích phân

$$I = \int_{x_1}^{x_2} (2ax + b)^3 e^{ax^2 + bx + c} dx.$$

A. $I = x_2 - x_1$ **B.** $I = \frac{x_2 - x_1}{4}$ **C.** $I = 0$ **D.** $I = \frac{x_2 - x_1}{2}$

Câu 22: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) + f'(x) \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 0$. Tìm giá trị lớn nhất của $f(1)$

A. $\frac{2e-1}{e}$. **B.** $\frac{e-1}{e}$. **C.** $e-1$. **D.** $2e-1$.

Câu 23: Cho hàm số $y = f(x)$. Có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(1) = e$ và $(x+2)f(x) = xf'(x) - x^3$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Tính $f(2)$.

A. $4e^2 - 4e + 4$. **B.** $4e^2 - 2e + 1$. **C.** $2e^3 - 2e + 2$. **D.** $4e^2 + 4e - 4$.

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(x) - 8x^3.f(x^4) + \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} = 0$. Tích

phân $I = \int_0^1 f(x)dx$ có kết quả dạng $\frac{a-b\sqrt{2}}{c}$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $\frac{a}{c}, \frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính

$$T = a + b + c.$$

A. $T = 6.$

B. $T = -4.$

C. $T = 4.$

D. $T = -10.$

Câu 25: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $f(0) + f(1) = 0$. Biết $\int_0^1 f^2(x)dx = \frac{1}{2}$

, $\int_0^1 f'(x) \cos \pi x dx = \frac{\pi}{2}$. Tính $\int_0^1 f(x)dx$.

A. π

B. $\frac{1}{\pi}$

C. $\frac{2}{\pi}$

D. $\frac{3\pi}{2}$

BÀI 3: ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN.

MỨC ĐỘ: NHẬN BIẾT.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ ($a < b$). Diện tích hình D được tính theo công thức

A. $S = \int_a^b |f(x)|dx.$

B. $S = \int_a^b f|x|dx.$

C. $S = \left| \int_a^b f(x)dx \right|.$

D. $S = \int_a^b f(x)dx.$

Câu 2: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được xác định theo công thức

A. $S = \pi \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$

B. $S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$

C. $S = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx$

D. $S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$

Câu 3: Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $y = e^x$, $y = 2$, $x = 0$ và $x = 1$.

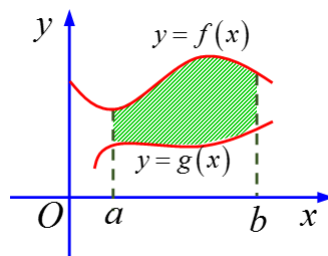
A. $S = 4 \ln 2 + e - 5$

B. $S = 4 \ln 2 - 6$

C. $S = e^2 - 7$

D. $e - 3$

Câu 4: Cho hình phẳng trong hình bên (phần tô đậm) quay quanh trục hoành. Thể tích khối tròn xoay tạo thành được tính theo công thức nào trong các công thức sau đây?



A. $V = \pi \int_a^b [g^2(x) - f^2(x)]dx.$

B. $V = \pi \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx.$

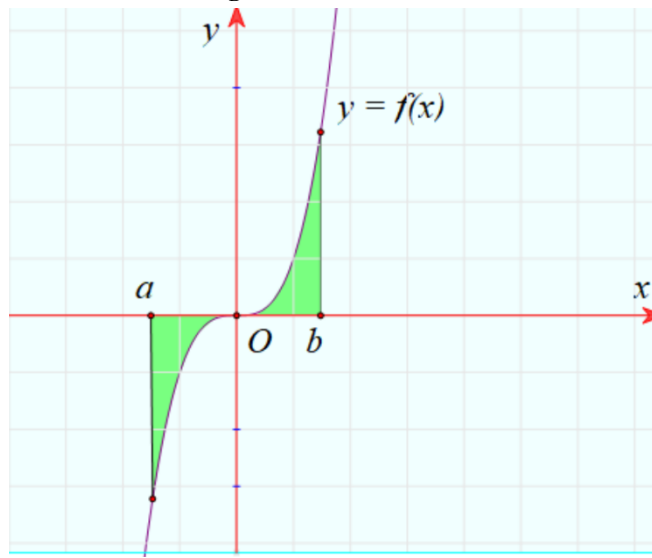
$$\text{C. } V = \pi \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$

$$\text{D. } V = \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] dx.$$

Câu 5: Cho hình phẳng D giới hạn bởi các đường $y = x - 1$, $x = 0$; $x = 2$ và trục Ox . Diện tích S của hình phẳng D được tính bởi công thức

$$\text{A. } S_D = \left| \int_0^2 (x-1) dx \right|. \quad \text{B. } S_D = \int_0^2 (1-x) dx. \quad \text{C. } S_D = \int_0^2 |x-1| dx. \quad \text{D. } S_D = \int_0^2 (x-1) dx.$$

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $(C): y = f(x)$, trục hoành, hai đường thẳng $x = a$; $x = b$ (như hình vẽ bên dưới). Giả sử S_D là diện tích của hình phẳng D . Tính S_D .



$$\text{A. } S_D = -\int_a^0 f(x) dx - \int_0^b f(x) dx.$$

$$\text{B. } S_D = \int_a^0 f(x) dx - \int_0^b f(x) dx.$$

$$\text{C. } S_D = -\int_a^0 f(x) dx + \int_0^b f(x) dx.$$

$$\text{D. } S_D = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^b f(x) dx.$$

Câu 7: Cho miền phẳng (D) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$ và trục hoành. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) quanh trục hoành.

$$\text{A. } \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{B. } 3\pi$$

$$\text{C. } \frac{3}{2}$$

$$\text{D. } \frac{2\pi}{3}$$

Câu 8: Thể tích khối tròn xoay có được khi quay quanh Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x+1}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ bằng

$$\text{A. } \frac{4\pi}{3}.$$

$$\text{B. } \frac{3\pi}{2}.$$

$$\text{C. } \frac{4}{3}.$$

$$\text{D. } \frac{3}{2}.$$

Câu 9: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 3x - 2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$. Quay (H) xung quanh trục hoành được khối tròn xoay có thể tích là

A. $V = \int_1^2 |x^2 - 3x + 2| dx.$

B. $V = \int_1^2 |x^2 - 3x + 2|^2 dx.$

C. $V = \pi \int_1^2 (x^2 - 3x + 2)^2 dx.$

D. $V = \pi \int_1^2 |x^2 - 3x + 2| dx.$

Câu 10: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 4x - 3$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 3$. Quay (H) xung quanh trục hoành được khối tròn xoay có thể tích là.

A. $V = \int_1^3 |x^2 - 4x + 3| dx.$

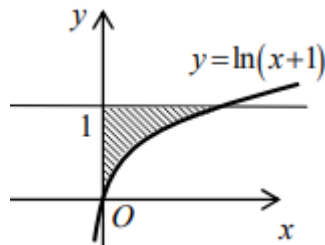
B. $V = \int_1^3 |x^2 - 4x + 3|^2 dx.$

C. $V = \pi \int_1^3 (x^2 - 4x + 3)^2 dx.$

D. $V = \pi \int_1^3 |x^2 - 4x + 3| dx.$

MỨC ĐỘ: THÔNG HIỂU.

Câu 11: Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \ln(x+1)$, đường thẳng $y = 1$ và trục tung.



Diện tích của (H) bằng

A. $e - 2.$

B. $e - 1.$

C. $1.$

D. $\ln 2.$

Câu 12: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 2$ và $y = -|x|$

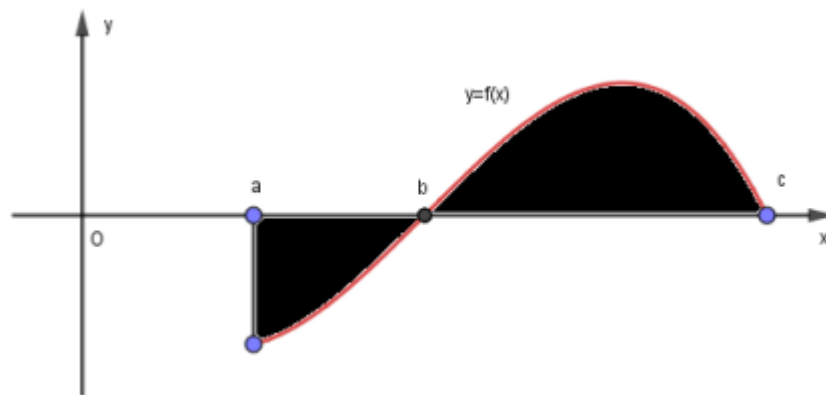
A. $\frac{13}{3}$

B. $\frac{7}{3}$

C. 3

D. $\frac{11}{3}$

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Diện tích S của miền hình phẳng (miền tô đen trong hình vẽ bên) được tính bởi công thức



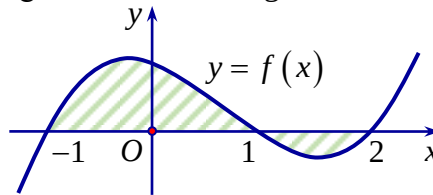
A. $S = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$

B. $S = \int_a^b f(x) dx - \int_b^c f(x) dx.$

C. $S = -\int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx.$

D. $S = -\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$

Câu 14: Gọi S là diện tích miền hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ bên. Công thức tính S là



A. $S = \int_{-1}^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx$

B. $S = \int_{-1}^1 f(x)dx - \int_1^2 f(x)dx$

C. $S = \int_{-1}^2 f(x)dx$

D. $S = -\int_{-1}^2 f(x)dx$

Câu 15: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $x = 4, x = 9$ và đường cong có phương trình $y^2 = 8x$.

A. $\frac{76\sqrt{2}}{3}$

B. $\frac{152}{3}$

C. $76\sqrt{2}$

D. $\frac{152\sqrt{2}}{3}$

Câu 16: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}, x = 0, x = 1$ và trục hoành. Tính thể tích V của khối tròn xoay sinh bởi hình (H) quay quanh trục Ox.

A. $\frac{\pi}{3}.$

B. $\frac{\pi}{2}.$

C. $\pi.$

D. $\sqrt{\pi}.$

Câu 17: Tính thể tích vật thể tròn xoay tạo bởi phép quay xung quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $y = 0, y = \sqrt{x}, y = x - 2$.

A. $\frac{8\pi}{3}$

B. $\frac{16\pi}{3}$

C. 10π

D. 8π

Câu 18: Tính thể tích của khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 4, y = 2x - 4, x = 0, x = 2$ quanh trục Ox.

A. $\frac{32\pi}{5}.$

B. $\frac{32\pi}{7}.$

C. $\frac{32\pi}{15}.$

D. $\frac{22\pi}{5}.$

Câu 19: Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = xe^x, y = 0, x = 0, x = 1$ xung quanh trục Ox là

A. $V = \int_0^1 x^2 e^{2x} dx.$

B. $V = \pi \int_0^1 xe^x dx.$

C. $V = \pi \int_0^1 x^2 e^{2x} dx.$

D. $V = \pi \int_0^1 x^2 e^x dx.$

Câu 20: Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = e^x, y = 0, x = -1, x = 1$. Thể tích vật thể tròn xoay được tạo ra khi cho hình (H) quay quanh trục hoành bằng

A. $\frac{e^2 - e^{-2}}{2}$

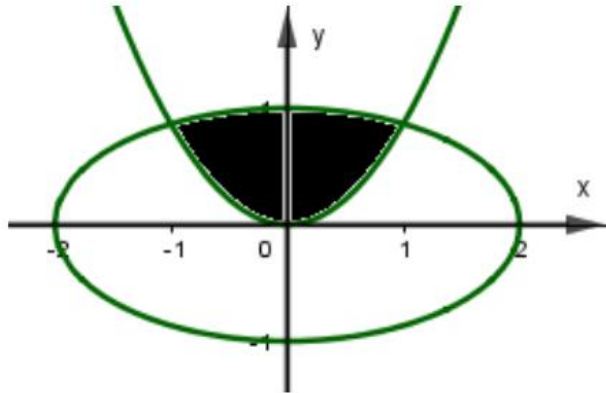
B. $\frac{(e^2 + e^{-2})\pi}{2}$

C. $\frac{e^4\pi}{2}$

D. $\frac{(e^2 - e^{-2})\pi}{2}$

MỨC ĐỘ: VẬN DỤNG THẤP.

Câu 21: Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2$ và đường Elip có phương trình $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng



- A. $\frac{2\pi + \sqrt{3}}{6}$. B. $\frac{2\pi}{3}$. C. $\frac{\pi + \sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{3\pi}{4}$.

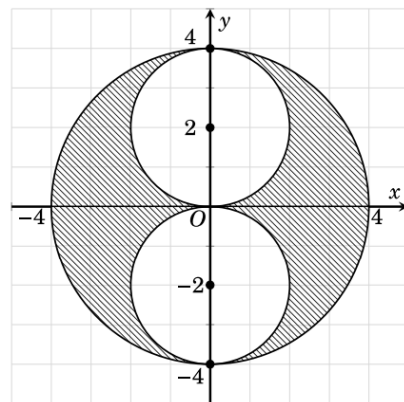
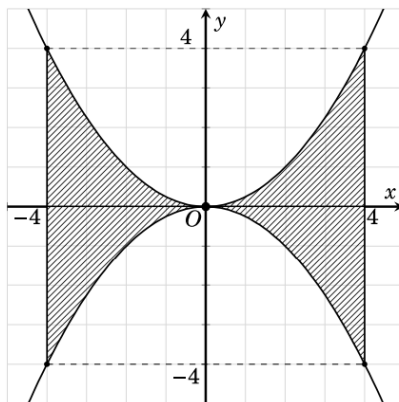
Câu 22: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2 - 6x + 12$ và các tiếp tuyến tại các điểm $A(1;7)$ và $B(-1;19)$.

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{4}{3}$ D. 2

Câu 23: Cho hàm số $y = \frac{x-m^2}{x+1}$ (với m là tham số khác 0) có đồ thị là (C) . Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và hai trục tọa độ. Có bao nhiêu giá trị thực của m thỏa mãn $S = 1$?

- A. Không B. Một C. Ba D. Hai

Câu 24: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , gọi (H_1) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{x^2}{4}$, $y = -\frac{x^2}{4}$, $x = -4$, $x = 4$ và hình (H_2) là hình gồm các điểm $(x;y)$ thỏa: $x^2 + y^2 \leq 16$, $x^2 + (y-2)^2 \geq 4$, $x^2 + (y+2)^2 \geq 4$.



Cho (H_1) và (H_2) quay quanh trục Oy ta được các vật thể có thể tích lần lượt là V_1 , V_2 . Đẳng

thức nào sau đây đúng?

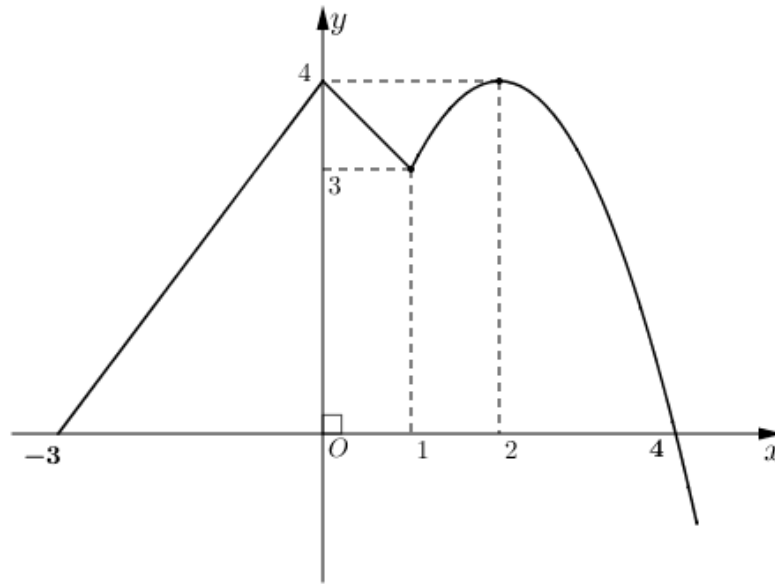
A. $V_1 = V_2$

B. $V_1 = \frac{1}{2}V_2$

C. $V_1 = 2V_2$

D. $V_1 = \frac{2}{3}V_2$

Câu 25: Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-3; 5]$ như hình vẽ dưới đây (phần cong của đồ thị là một phần của Parabol $y = ax^2 + bx + c$). Tính $I = \int_{-2}^3 f(x) dx$.



A. $I = \frac{53}{3}$

B. $I = \frac{97}{6}$

C. $I = \frac{43}{2}$

D. $I = \frac{95}{6}$

Câu 26: Thể tích V của khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường tròn $(C): x^2 + (y - 3)^2 = 1$ xung quanh trục hoành là

A. $V = 6\pi$

B. $V = 6\pi^3$

C. $V = 3\pi^2$

D. $V = 6\pi^2$

Câu 27: Thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}e^x$, trục hoành và đường thẳng $x = 1$ là

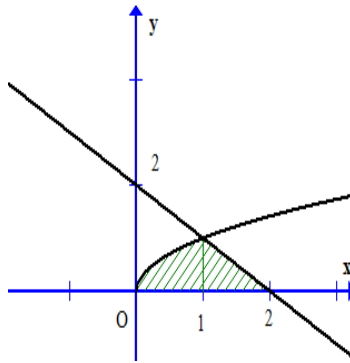
A. $\frac{\pi e^2}{4}$

B. $\frac{\pi}{4}(e^4 - 1)$

C. $\frac{\pi}{4}(e^2 + 1)$

D. $\frac{1}{4}(e^2 + 1)$

Câu 28: Cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = \sqrt{x}$, đường thẳng $y = 2 - x$ và trục hoành (phần gạch chéo trong hình vẽ). Thể tích của khối tròn xoay sinh bởi hình phẳng trên khi quay quanh trục Ox bằng.

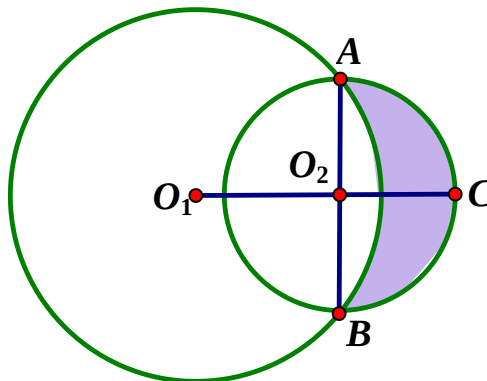


- A. $\frac{5\pi}{4}$. B. $\frac{4\pi}{3}$. C. $\frac{7\pi}{6}$. D. $\frac{5\pi}{6}$.

Câu 29: Cho hình phẳng H giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{\ln(2x+1)}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình H quanh trục Ox .

- A. $\frac{2}{3} \ln 3 - 1$ B. $\frac{\pi}{2} \ln 3 - \pi$ C. $\left(\pi - \frac{1}{2}\right) \ln 3 - 1$ D. $\frac{3\pi}{2} \ln 3 - \pi$

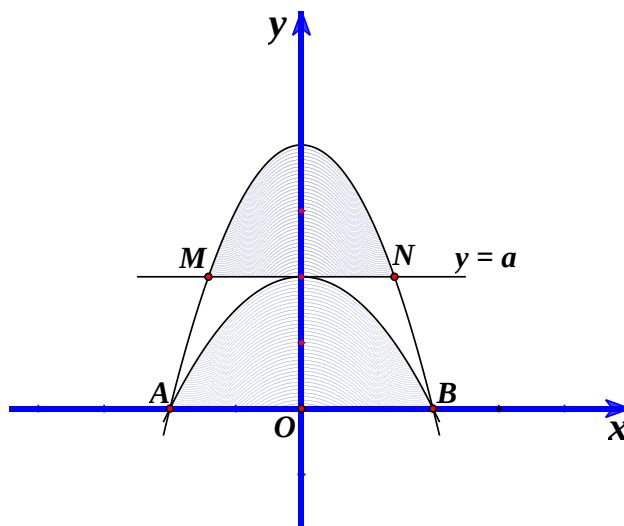
Câu 30: Cho hai đường tròn $(O_1; 10)$ và $(O_2; 8)$ cắt nhau tại hai điểm A, B sao cho AB là một đường kính của đường tròn (O_2) . Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi hai đường tròn (phần được tô màu như hình vẽ). Quay (H) quanh trục O_1O_2 ta được một khối tròn xoay. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành.



- A. $\frac{824\pi}{3}$. B. $\frac{608}{3}\pi$. C. $\frac{97}{3}\pi$. D. $\frac{145}{3}\pi$

MỨC ĐỘ : VẬN DỤNG CAO.

Câu 31: Cho parabol $(P_1): y = -x^2 + 4$ cắt trục hoành tại hai điểm A, B và đường thẳng $d: y = a$ ($0 < a < 4$). Xét parabol (P_2) đi qua A, B và có đỉnh thuộc đường thẳng $y = a$. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_1) và d . S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_2) và trục hoành. Biết $S_1 = S_2$ (tham khảo hình vẽ bên).



Tính $T = a^3 - 8a^2 + 48a$.

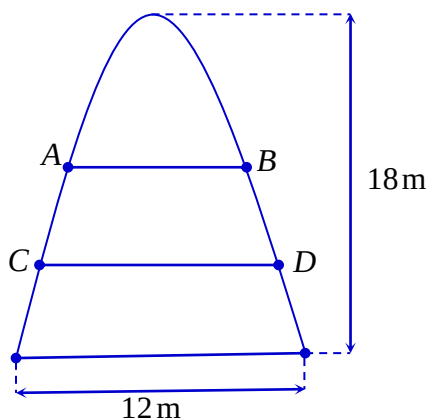
A. $T = 99$

B. $T = 64$

C. $T = 32$

D. $T = 72$

Câu 32: Một cổng chào có dạng hình Parabol chiều cao 18 m, chiều rộng chân đế 12 m. Người ta căng hai sợi dây trang trí AB , CD nằm ngang đồng thời chia hình giới hạn bởi Parabol và mặt đất thành ba phần có diện tích bằng nhau. Tỉ số $\frac{AB}{CD}$ bằng



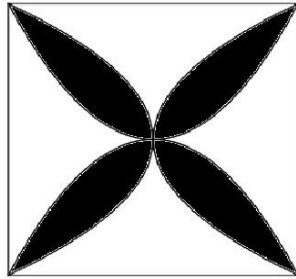
A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

B. $\frac{4}{5}$.

C. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

D. $\frac{3}{1+2\sqrt{2}}$.

Câu 33: Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 40 cm. Người thiết kế đã sử dụng bốn đường parabol có chung đỉnh tại tâm của viên gạch để tạo ra bốn cánh hoa (được tô màu sẫm như hình vẽ bên). Diện tích mỗi cánh hoa của viên gạch bằng



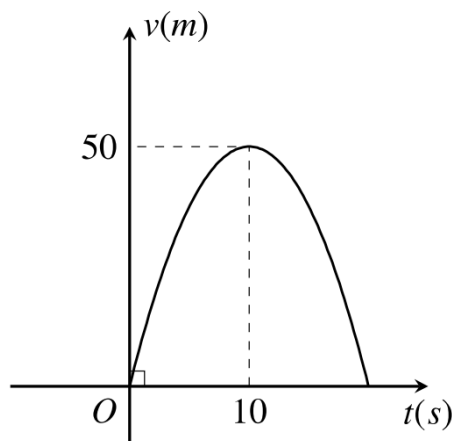
Diện tích mỗi cánh hoa của viên gạch bằng

- A. 800cm^2 B. $\frac{800}{3}\text{cm}^2$ C. $\frac{400}{3}\text{cm}^2$ D. 250cm^2

BÀI TOÁN THỰC TẾ VÀ ỨNG DỤNG THỂ TÍCH.

MỨC ĐỘ: THÔNG HIỂU.

- Câu 34:** Một ô tô chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v(t) = 7t$ (m/s). Đi được 5 (s) người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -35$ (m/s²). Tính quãng đường của ô tô đi được từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn?
A. 87.5 mét. B. 96.5 mét. C. 102.5 mét. D. 105 mét.
- Câu 35:** Một ô tô đang chuyển động đều với vận tốc 20 (m/s) rồi hãm phanh chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -2t + 20$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu hãm phanh. Tính quãng đường mà ô tô đi được trong 15 giây cuối cùng đến khi dừng hẳn.
A. 100 (m). B. 75 (m). C. 200 (m). D. 125 (m).
- Câu 36:** Một ô tô đang chạy với tốc độ 36(km/h) thì người lái xe đạp phanh, từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 10$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến lúc dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?
A. 10(m). B. 20(m). C. 2(m). D. 0,2(m).
- Câu 37:** Một vật chuyển động vận tốc tăng liên tục được biểu thị bằng đồ thị là đường cong parabol có hình bên dưới.



Biết rằng sau 10 s thì vật đó đạt đến vận tốc cao nhất và bắt đầu giảm tốc. Hỏi từ lúc bắt đầu đến

lúc đạt vận tốc cao nhất thì vật đó đi được quãng đường bao nhiêu mét?

- A. 300 m B. $\frac{1400}{3}$ m C. $\frac{1100}{3}$ m D. $\frac{1000}{3}$ m

Câu 38: Một vật đang chuyển động với vận tốc 10 m/s thì bắt đầu tăng tốc với gia tốc

$$a(t) = 6t + 12t^2 \text{ (m/s}^2\text{)}$$

Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là

- A. $\frac{4300}{3}$ m B. 11100 m C. 4300 m D. $\frac{98}{3}$ m

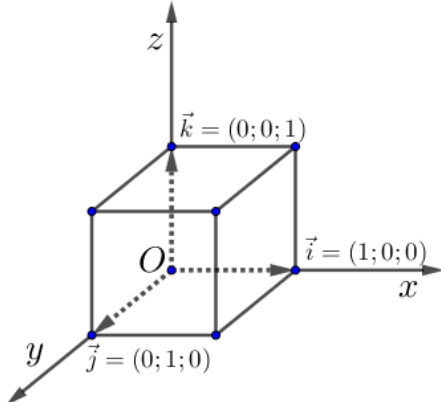
Câu 39: Hai người A, B đang chạy xe ngược chiều nhau thì xảy ra va chạm, hai xe tiếp tục di chuyển theo chiều của mình thêm một quãng đường nữa thì dừng hẳn. Biết rằng sau khi va chạm, một người di chuyển tiếp với vận tốc $v_1(t) = 6 - 3t$ mét trên giây, người còn lại di chuyển với vận tốc $v_2(t) = 12 - 4t$ mét trên giây. Tính khoảng cách hai xe khi đã dừng hẳn.

- A. 25 mét B. 22 mét C. 20 mét D. 24 mét

Câu 40: Cho hàm số $y = x^4 - 4x^2 + m$ có đồ thị (C_m) . Giả sử (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt sao cho diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C_m) với trục hoành có diện tích phần phía trên trục hoành bằng diện tích phần phía dưới trục hoành. Khi đó m thuộc khoảng nào dưới đây?

- A. $m \in (-1; 1)$. B. $m \in (3; 5)$. C. $m \in (2; 3)$. D. $m \in (5; +\infty)$.

II. HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN

	1. Hệ trục tọa độ Oxyz: - Hệ trục gồm ba trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc nhau. - Trục Ox : trục hoành, có vector đơn vị $\vec{i} = (1; 0; 0)$. - Trục Oy : trục tung, có vector đơn vị $\vec{j} = (0; 1; 0)$. - Trục Oz : trục cao, có vector đơn vị $\vec{k} = (0; 0; 1)$. - Điểm $O(0; 0; 0)$ là gốc tọa độ. 2. Tọa độ vector: Vector $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \Leftrightarrow \vec{u} = (x; y; z)$. Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Ta có:
$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3)$ $k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$ $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$	$\vec{a}$ cùng phương $\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b} \text{ (} k \in \mathbb{R} \text{)}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}, \text{ (} b_1, b_2, b_3 \neq 0 \text{)}.$

▪ $\vec{a}.\vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3$		▪ $ \vec{a} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$		▪ $\vec{a}^2 = \vec{a} ^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$	
▪ $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$			▪ $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{ \vec{a} . \vec{b} } = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$		
3. Tọa độ điểm: $M(x; y; z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (x; y; z)$. Cho $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$, $C(x_C; y_C; z_C)$, ta có:					
▪ $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$			▪ $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$		
▪ Tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB : $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right).$			▪ Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC : $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right).$		
QUY TẮC CHIỀU ĐẶC BIỆT					
Chiều điểm trên trục tọa độ			Chiều điểm trên mặt phẳng tọa độ		
▪ Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giống trục Ox)}]{\text{Chiều vào Ox}} M_1(x_M; 0; 0)$			▪ Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giống trục Ox, y)}]{\text{Chiều vào Oxy}} M_1(x_M; y_M; 0)$		
▪ Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giống trục Oy)}]{\text{Chiều vào Oy}} M_2(0; y_M; 0)$			▪ Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giống trục y, z)}]{\text{Chiều vào Oyz}} M_2(0; y_M; z_M)$		
▪ Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giống trục Oz)}]{\text{Chiều vào Oz}} M_3(0; 0; z_M)$			▪ Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giống trục x, z)}]{\text{Chiều vào Oxz}} M_3(x_M; 0; z_M)$		
Đối xứng điểm qua trục tọa độ			Đối xứng điểm qua mặt phẳng tọa độ		
▪ $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giống trục y, z; hoặc trục x, y)}]{\text{Nhả xuống qua Ox}} M_1(x_M; -y_M; -z_M)$			▪ $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giống trục x, y; hoặc trục z)}]{\text{Nhả xuống qua Oxy}} M_1(x_M; y_M; -z_M)$		
▪ $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giống trục x, z; hoặc trục y)}]{\text{Nhả xuống qua Oy}} M_2(-x_M; y_M; -z_M)$			▪ $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giống trục x, z; hoặc trục y)}]{\text{Nhả xuống qua Oxz}} M_2(x_M; -y_M; z_M)$		
▪ $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giống trục x, y; hoặc trục z)}]{\text{Nhả xuống qua Oz}} M_3(-x_M; -y_M; z_M)$			▪ $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giống trục y, z; hoặc trục x)}]{\text{Nhả xuống qua Oyz}} M_3(-x_M; y_M; z_M)$		
4. Tích có hướng của hai vector:					
☞ Định nghĩa: Cho $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, tích có hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là:					
$[\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1).$					
☞ Tính chất:	$[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{a}$	$[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{b}$	$ \vec{a}, \vec{b} = \vec{a} . \vec{b} .\sin(\vec{a}, \vec{b})$		
▪ Điều kiện cùng phương của hai vector $\vec{a}$ & $\vec{b}$ là $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$ với $\vec{0} = (0; 0; 0)$.		▪ Điều kiện đồng phẳng của ba vector $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$ là $[\vec{a}, \vec{b}].\vec{c} = 0$.			
▪ Diện tích hình bình hành $ABCD$: $S_{\square ABCD} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}] $.			▪ Diện tích tam giác ABC : $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] $.		
▪ Thể tích khối hộp: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}].\overrightarrow{AA'} $.			▪ Thể tích tứ diện: $V_{ABCD} = \frac{1}{6} [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD} $.		
5. Phương trình mặt cầu:					
Dạng 1: (S): $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$			Dạng 2: (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$		

$\xrightarrow{\text{Mặt cầu (S) có}} \begin{cases} \text{tâm } I(a;b;c) \\ R = \sqrt{R^2} \end{cases}$	$\xrightarrow{\text{Mặt cầu (S) có}} \begin{cases} \text{tâm } I(a;b;c) \\ R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} \end{cases}$
☞ Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ là phương trình mặt cầu $\Leftrightarrow \boxed{a^2 + b^2 + c^2 - d > 0}$.	
Bài toán 5.1. Viết phương trình mặt cầu tâm I và đi qua điểm M. ▪ Bước 1: Tính bán kính $R = IM$. ▪ Bước 2: Viết phương trình mặt cầu dạng 1 .	Bài toán 5.2. Viết phương trình mặt cầu có đường kính AB. ▪ Bước 1: Tìm tâm I là trung điểm AB. Bán kính $R = \frac{AB}{2} = IA = IB$. ▪ Bước 2: Viết phương trình mặt cầu dạng 1 .

***BÀI TẬP ÁP DỤNG**

CHỦ ĐỀ 1. TỌA ĐỘ ĐIỂM – VECTOR.

LOẠI 1. TÌM TỌA ĐỘ ĐIỂM, VECTOR LIÊN QUAN ĐẾN HỆ TRỤC OXYZ.

MỨC ĐỘ: NHẬN BIẾT.

- Câu 1:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(3; -1; 2)$. Điểm N đối xứng với M qua mặt phẳng (Oyz) là
 A. $N(0; -1; 2)$. B. $N(3; 1; -2)$. C. $N(-3; -1; 2)$. D. $N(0; 1; -2)$.
- Câu 2:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(1; -4; -5)$. Tọa độ điểm A' đối xứng với điểm A qua mặt phẳng Oxz là
 A. $(1; -4; 5)$ B. $(-1; 4; 5)$ C. $(1; 4; 5)$ D. $(1; 4; -5)$
- Câu 3:** Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho $A(1; 2; -1)$, $B(3; 1; -2)$, $C(2; 3; -3)$ và G là trọng tâm tam giác ABC . Xác định vector chỉ phương của đường thẳng OG .
 A. $\vec{u} = (1; 2; -2)$ B. $\vec{u} = (1; 2; -1)$ C. $\vec{u} = (2; 1; -2)$ D. $\vec{u} = (2; 2; -2)$
- Câu 4:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{u}(1; a; 2)$, $\vec{v}(-3; 9; b)$ cùng phương. Tính $a^2 + b$.
 A. 15 B. 3 C. 0 D. Không tính được
- Câu 5:** Trong không gian $Oxyz$, cho ba vector $\vec{a} = (-1; 1; 0)$, $\vec{b} = (1; 1; 0)$, $\vec{c} = (1; 1; 1)$. Tìm mệnh đề **đúng**.
 A. Hai vector $\vec{a}$ và $\vec{c}$ cùng phương. B. Hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.
 C. Hai vector $\vec{b}$ và $\vec{c}$ không cùng phương. D. $\vec{a} \cdot \vec{c} = 1$.
- Câu 6:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x + 2y - z + 1 = 0$. Vector nào trong các vector sau đây là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) ?
 A. $\vec{n} = (3; 2; -1)$. B. $\vec{n} = (3; 2; 1)$. C. $\vec{n} = (-2; 3; 1)$. D. $\vec{n} = (3; -2; -1)$.
- Câu 7:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba vector $\vec{a} = (1; -1; 2)$, $\vec{b} = (3; 0; -1)$, $\vec{c} = (-2; 5; 1)$, đặt $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$. Tìm tọa độ của $\vec{m}$.
 A. $(-6; 6; 0)$. B. $(6; 0; -6)$. C. $(0; 6; -6)$. D. $(6; -6; 0)$.
- Câu 8:** Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (-3; 2; 1)$ và điểm $A(4; 6; -3)$. Tìm tọa độ điểm B thỏa mãn $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$.
 A. $(7; 4; -4)$. B. $(1; 8; -2)$. C. $(-7; -4; 4)$. D. $(-1; -8; 2)$.

- Câu 9:** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; 2; 3)$. Hình chiếu của M lên trục Oy là điểm ?
A. $P(1; 0; 3)$ **B.** $Q(0; 2; 0)$ **C.** $R(1; 0; 0)$ **D.** $S(0; 0; 3)$
- Câu 10:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vector $\vec{u} = 2\vec{i} - 5\vec{k}$. Tọa độ của vector $\vec{u}$ là.
A. $\vec{u} = (2; 3; -5)$. **B.** $\vec{u} = (-2; 0; 5)$. **C.** $\vec{u} = (-2; 3; -5)$. **D.** $\vec{u} = (2; 0; -5)$.
- Câu 11:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho véc tơ $\vec{a}$ thỏa mãn hệ thức $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{k}$. Bộ số nào dưới đây là tọa độ của véc tơ $\vec{a}$.
A. $(2; 0; -3)$. **B.** $(2; 0; 3)$. **C.** $(2; -3; 0)$. **D.** $(2; 3; 0)$.
- Câu 12:** Trong không gian $Oxyz$, cho biểu diễn của vector $\vec{a}$ qua các vector đơn vị là $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{k} - 3\vec{j}$. Tọa độ của vector $\vec{a}$ là
A. $(1; 2; -3)$. **B.** $(2; -3; 1)$. **C.** $(2; 1; -3)$. **D.** $(1; -3; 2)$.
- Câu 13:** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; 2; 3)$. Hình chiếu vuông góc của M trên (Oxz) là điểm nào sau đây.
A. $K(0; 2; 3)$. **B.** $H(1; 2; 0)$. **C.** $F(0; 2; 0)$. **D.** $E(1; 0; 3)$.
- Câu 14:** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; 0; 2)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?
A. $M \in (Oxz)$ **B.** $M \in (Oyz)$ **C.** $M \in Oy$ **D.** $M \in (Oxy)$
- Câu 15:** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3; -4; 5)$. Hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (Oxz) là điểm:
A. $P(3; 0; 5)$ **B.** $M(3; 0; 0)$ **C.** $N(0; -4; 5)$ **D.** $Q(0; 0; 5)$
- Câu 16:** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(4; 2; 1)$ và $B(2; 0; 5)$. Tọa độ vector $\overrightarrow{AB}$ là:
A. $(2; 2; -4)$. **B.** $(1; 1; -2)$. **C.** $(-1; -1; 2)$. **D.** $(-2; -2; 4)$.
- Câu 17:** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; -2; 3)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (Oyz) là điểm M . Tọa độ điểm M là
A. $M(1; -2; 0)$. **B.** $M(0; -2; 3)$. **C.** $M(1; 0; 3)$. **D.** $M(1; 0; 0)$.
- Câu 18:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; -3)$, $B(0; 2; 1)$. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn AB .
A. $I\left(-\frac{1}{2}; 0; 2\right)$. **B.** $I(-1; 0; 4)$. **C.** $I(1; 4; -2)$. **D.** $I\left(\frac{1}{2}; 2; -1\right)$.
- Câu 19:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(-2; 4; 1)$, $B(1; 1; -6)$, $C(0; -2; 3)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .
A. $G\left(\frac{1}{3}; -1; \frac{2}{3}\right)$. **B.** $G\left(-\frac{1}{3}; 1; -\frac{2}{3}\right)$. **C.** $G(-1; 3; -2)$. **D.** $G\left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}; -\frac{5}{2}\right)$.
- Câu 20:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(1; 2; -3)$ và $N(-3; 0; 7)$. Gọi I là trung điểm của đoạn MN . Xác định tọa độ của điểm I .
A. $I(-2; 2; 4)$. **B.** $I(-1; 1; 2)$. **C.** $I(-4; -2; 10)$. **D.** $I(-2; -1; 5)$.

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$ cho $\vec{a}(3;-1;2); \vec{b}(4;2;-6)$. Tính tọa độ của vector $\vec{a} + \vec{b}$.

- A. $\vec{a} + \vec{b} = (-1; -3; 8)$. B. $\vec{a} + \vec{b} = (-7; -1; 4)$.
C. $\vec{a} + \vec{b} = (7; 1; -4)$. D. $\vec{a} + \vec{b} = (1; 3; -8)$.

Câu 22: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;-1), B(1;2;3)$. Độ dài đoạn thẳng AB bằng

- A. $3\sqrt{2}$. B. 18. C. $\sqrt{3}$. D. $\sqrt{22}$.

Câu 23: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;2)$ và $B(3;3;6)$. Tọa độ vec-tơ $\overrightarrow{AB}$ là

- A. $(-4; -4; 8)$. B. $(-2; -2; -4)$. C. $(2; 2; 4)$. D. $(4; 4; 8)$.

Câu 24: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;0;3)$ và $B(4;0;0)$. Độ dài đoạn thẳng AB bằng

- A. 1. B. 7. C. 25. D. 5.

MỨC ĐỘ: THÔNG HIỂU.

Câu 25: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1;1;1), B(2;3;0)$. Biết rằng tam giác ABC có trục tâm $H(0;3;2)$ tìm tọa độ của điểm C .

- A. $C(3;2;3)$. B. $C(4;2;4)$. C. $C(1;2;1)$. D. $C(2;2;2)$.

Câu 26: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;1;-1), B(0;2;4), C(3;0;0)$. Hãy cho biết tập hợp những điểm cách đều 3 điểm A, B, C là gì?

- A. Một điểm duy nhất. B. Một mặt phẳng. C. Một đường thẳng. D. Không tồn tại.

Câu 27: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $K(2;4;6)$, gọi K' là hình chiếu vuông góc của K lên Oz , khi đó trung điểm của OK' có tọa độ là:

- A. $(0;0;3)$. B. $(1;0;0)$. C. $(1;2;3)$. D. $(0;2;0)$.

Câu 28: Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(x;1;2), B(2;y;1), C(1;2;3)$. Với giá trị nào của x, y thì ba điểm A, B, C thẳng hàng?

- A. $x = \frac{3}{2}$ và $y = 0$. B. $x = 0$ và $y = \frac{3}{2}$. C. $x = 2$ và $y = \frac{1}{2}$. D. $x = \frac{1}{2}$ và $y = 2$.

MỨC ĐỘ : VẬN DỤNG THẤP.

Câu 29: Trong không gian cho các vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng thỏa mãn $(x-y)\vec{a} + (y-z)\vec{b} = (x+z-2)\vec{c}$. Tính $T = x + y + z$.

- A. 2 B. $\frac{3}{2}$ C. 3 D. 1

Câu 30: Trong không gian $Oxyz$ cho $A(1;2;-1), B(3;1;-2), C(2;3;-3)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 3 = 0$. $M(a;b;c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho biểu thức $MA^2 + MB^2 + MC^2$ có giá trị nhỏ nhất. Xác định $a + b + c$.

- A. -3 B. -2 C. 2 D. 3

Câu 31: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho $A(1;1;-1), B(2;3;1), C(5;5;1)$. Đường phân giác trong góc A của tam giác ABC cắt mặt phẳng (Oxy) tại $M(a;b;0)$. Tính $3b - a$.

- A. 6 B. 5 C. 3 D. 0

Câu 32: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; -1)$, đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x + y + 2z + 1 = 0$. Điểm B thuộc mặt phẳng (P) thỏa mãn đường thẳng AB vuông góc và cắt đường thẳng d . Tọa độ điểm B là
A. $(3; -2; -1)$. **B.** $(-3; 8; -3)$. **C.** $(0; 3; -2)$. **D.** $(6; -7; 0)$.

Câu 33: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2; 3; 1)$, $B(2; 1; 0)$, $C(-3; -1; 1)$. Tìm tất cả các điểm D sao cho $ABCD$ là hình thang có đáy AD và $S_{ABCD} = 3S_{ABC}$.

A. $D(8; 7; -1)$. **B.** $\begin{bmatrix} D(-8; -7; 1) \\ D(12; 1; -3) \end{bmatrix}$. **C.** $\begin{bmatrix} D(8; 7; -1) \\ D(-12; -1; 3) \end{bmatrix}$. **D.** $D(-12; -1; 3)$.

LOẠI 2. TÍCH VÔ HƯỚNG VÀ ỨNG DỤNG.

MỨC ĐỘ: NHẬN BIẾT.

Câu 34: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u} = (x; 2; 1)$ và $\vec{v} = (1; -1; 2x)$. Tính tích vô hướng của $\vec{u}$ và $\vec{v}$.

A. $x + 2$. **B.** $3x - 2$. **C.** $3x + 2$. **D.** $-2 - x$

Câu 35: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tìm điều kiện để 2 vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương.

A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. **B.** $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$. **C.** $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$. **D.** $\vec{a} - \vec{b} = \vec{0}$.

Câu 36: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $P(a; b; c)$. Khoảng cách từ P đến trục tọa độ Oy bằng:

A. $\sqrt{a^2 + c^2}$ **B.** b **C.** $|b|$ **D.** $a^2 + c^2$

Câu 37: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1; 2; 3)$, $B(1; 0; 2)$. Độ dài đoạn thẳng AB bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** 3 . **C.** 9 . **D.** $\sqrt{29}$.

MỨC ĐỘ: THÔNG HIỂU.

Câu 38: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(\alpha): 2x - y - 3z = 4$. Gọi A, B, C lần lượt là giao điểm của mặt phẳng (α) với các trục tọa độ Ox, Oy, Oz . Thể tích khối tứ diện $OABC$ bằng

A. 1 **B.** 2 **C.** $\frac{32}{9}$ **D.** $\frac{16}{9}$

Câu 39: Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(8; 9; 2)$, $B(3; 5; 1)$, $C(11; 10; 4)$. Số đo góc A của tam giác ABC là

A. 60° **B.** 30° **C.** 150° **D.** 120°

Câu 40: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác OAB với $O(0; 0; 0)$, $A(-1; 8; 1)$, $B(7; -8; 5)$. Phương trình đường cao OH của tam giác OAB là

A. $\begin{cases} x = 6t \\ y = 4t \\ z = 5t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ **B.** $\begin{cases} x = 8t \\ y = -16t \\ z = 4t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ **C.** $\begin{cases} x = 5t \\ y = -4t \\ z = 6t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ **D.** $\begin{cases} x = 5t \\ y = 4t \\ z = 6t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

Câu 41: Trong không gian $Oxyz$ cho vector $\vec{u}(1;1;2)$ và $\vec{v}(2;0;m)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m biết $\cos \vec{u};\vec{v} = \frac{4}{\sqrt{30}}$.

- A. $m=1$ B. $m=1; m=-11$ C. $m=-11$ D. $m=0$

Câu 42: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(5;1;3), B(1;6;2), C(5;0;4)$. Điểm D thỏa mãn $ABCD$ là hình bình hành. Tọa độ của điểm D là

- A. $(1;7;1)$. B. $(1;5;3)$. C. $(0;4;1)$. D. $(9;-5;5)$.

MỨC ĐỘ : VẬN DỤNG THẤP.

Câu 43: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 6$ tiếp xúc với hai mặt phẳng $(P): x+y+2z+5=0$, $(Q): 2x-y+z-5=0$ lần lượt tại các điểm A, B . Độ dài đoạn AB là

- A. $3\sqrt{2}$. B. $\sqrt{3}$. C. $2\sqrt{6}$. D. $2\sqrt{3}$.

MỨC ĐỘ: VẬN DỤNG CAO.

Câu 44: Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-m}{2}$ và mặt c $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 9$. Tìm m để đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt E, F sao cho độ dài đoạn EF lớn nhất

- A. $m=1$. B. $m=0$. C. $m=-\frac{1}{3}$. D. $m=\frac{1}{3}$.

Câu 45: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \\ z=t \end{cases}$, $d': \begin{cases} x=2t' \\ y=1+t' \\ z=2+t' \end{cases}$. Đường thẳng Δ cắt d ,

d' lần lượt tại các điểm A, B thỏa mãn độ dài đoạn thẳng AB nhỏ nhất. Phương trình đường thẳng Δ là

- A. $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{3}$. B. $\frac{x-4}{-2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{3}$.
C. $\frac{x}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{-3}$. D. $\frac{x-2}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{3}$.

LOẠI 3. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU (XÁC ĐỊNH TÂM, BÁN KÍNH, VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU ĐƠN GIẢN, VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI HAI MẶT CẦU, ĐIỂM ĐẾN MẶT CẦU ĐƠN GIẢN.

MỨC ĐỘ: NHẬN BIẾT.

Câu 46: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 25$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) .

- A. $I(1;-2;0)$, $R=5$. B. $I(-1;2;0)$, $R=25$. C. $I(1;-2;0)$, $R=25$. D. $I(-1;2;0)$, $R=5$.

Câu 47: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 9$. Tọa độ tâm và bán kính của mặt cầu (P) là

- A. $I(-1;3;2)$, $R=9$ B. $I(1;-3;-2)$, $R=9$

C. $I(-1;3;2)$, $R=3$

D. $I(1;3;2)$, $R=3$

Câu 48: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (P) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0$. Tọa độ tâm T của (P) là.

A. $T(2;4;6)$

B. $T(1;2;3)$

C. $T(-2;-4;-6)$

D. $T(-1;-2;-3)$

Câu 49: Trong không gian $Oxyz$, tọa độ tâm I và bán kính của mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 20 = 0$ là

A. $I(1;-2)$, $R=5$

B. $I(1;2;0)$, $R=5$

C. $I(-1;2;0)$, $R=5$

D. $I(1;-2;0)$, $R=5$

Câu 50: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình chính tắc của mặt cầu có đường kính AB với $A(2;1;0)$, $B(0;1;2)$.

A. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 4$.

B. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 2$.

C. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 4$.

D. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 2$.

Câu 51: Trong không gian $Oxyz$, tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu $(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 9$.

A. $I(1;0;-2)$; $R=3$.

B. $I(1;0;-2)$; $R=9$.

C. $I(1;1;-2)$; $R=3$.

D. $I(1;1;-2)$; $R=9$.

Câu 52: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 2$. Trong các điểm được cho dưới đây, điểm nào nằm ngoài mặt cầu (S) ?

A. $M(1;1;1)$

B. $N(0;1;0)$

C. $P(1;0;1)$

D. $Q(1;1;0)$

Câu 53: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z - 3 = 0$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) .

A. $I(1;-2;-1)$ và $R=9$.

B. $I(1;-2;-1)$ và $R=3$.

C. $I(-1;2;1)$ và $R=9$.

D. $I(-1;2;1)$ và $R=3$.

Câu 54: Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu tâm $I(1;0;-2)$, bán kính $r=4$?

A. $(x+1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$.

B. $(x+1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 16$.

C. $(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 4$.

D. $(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 16$.

Câu 55: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;2;1)$, $B(0;2;3)$. Viết phương trình mặt cầu có đường kính AB .

A. $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = \frac{5}{4}$

B. $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = \frac{5}{4}$

C. $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = \frac{5}{4}$

D. $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = \frac{5}{4}$

Câu 56: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 9$. Xác định tọa độ tâm I và tính bán kính R của mặt cầu (S) .

A. $I(1;-2;0)$; $R=3$.

B. $I(-1;2;0)$; $R=3$.

C. $I(1;-2;0)$; $R=9$.

D. $I(-2;1;1)$; $R=9$.

Câu 57: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 10y - 6z + 49 = 0$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) .

A. $I(4; -5; 3)$ và $R = 1$.

B. $I(-4; 5; -3)$ và $R = 7$.

C. $I(-4; 5; -3)$ và $R = 1$. D. $I(4; -5; 3)$ và $R = 7$.

Câu 58: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 8$. Khi đó tâm và bán kính mặt cầu đó là?

A. $I(3; -1; -2)$, $R = 2\sqrt{2}$.

B. $I(3; -1; -2)$, $R = 4$.

C. $I(-3; 1; 2)$, $R = 2\sqrt{2}$.

D. $I(-3; 1; 2)$, $R = 4$.

MỨC ĐỘ: THÔNG HIỂU.

Câu 59: Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(2; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$, $C(2; 3; 6)$. Thể tích khối cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ là

A. $\frac{1372\pi}{3}$

B. $\frac{343\pi}{6}$

C. 49π

D. $\frac{341\pi}{6}$

Câu 60: Trong không gian $Oxyz$, cho $d: \frac{x}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z = 0$ và $(Q): x - 2y + 3z - 5 = 0$. Mặt cầu (S) tâm I là giao điểm của d và (P) , mặt phẳng (Q) tiếp xúc với (S) . Viết phương trình của mặt cầu (S) .

A. $(x+2)^2 + (y+4)^2 + (z+3)^2 = \frac{2}{7}$.

B. $(x+2)^2 + (y+4)^2 + (z+3)^2 = \frac{9}{14}$.

C. $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = \frac{9}{14}$.

D. $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = \frac{2}{7}$.

Câu 61: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(3; 4; -2)$. Lập phương trình mặt cầu tâm I và tiếp xúc với trục Oz .

A. $(S): (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z+2)^2 = 25$.

B. $(S): (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z+2)^2 = 4$.

C. $(S): (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z+2)^2 = 5$.

D. $(S): (x+3)^2 + (y+4)^2 + (z-2)^2 = 20$.

MỨC ĐỘ: VẬN DỤNG THẤP.

Câu 62: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu $(S_1): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 16$ và $(S_2): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$ cắt nhau theo giao tuyến là đường tròn (C) . Tìm tọa độ tâm J của đường tròn (C) .

A. $J\left(-\frac{1}{2}; \frac{7}{4}; \frac{1}{4}\right)$

B. $J\left(\frac{1}{3}; \frac{7}{4}; \frac{1}{4}\right)$

C. $J\left(-\frac{1}{3}; \frac{7}{4}; -\frac{1}{4}\right)$

D. $J\left(-\frac{1}{2}; \frac{7}{4}; -\frac{1}{4}\right)$

Câu 63: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau theo giao tuyến Δ . Trên đường Δ lấy hai điểm A, B với $AB = a$. Trong mặt phẳng (P) lấy điểm C và trong mặt phẳng (Q) lấy điểm D sao cho AC, BD cùng vuông góc với Δ và $AC = BD = AB$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $a\sqrt{3}$. D. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 64: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{1} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-1}{1}$ và

$$d_2: \begin{cases} x = 6 - 3t \\ y = -2 + 2t \\ z = 4t \end{cases} \text{ và mặt phẳng } (\alpha): 2x + y - 2z + 3 = 0. \text{ Mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả}$$

hai đường thẳng d_1 và d_2 , cắt mặt phẳng (α) theo một đường tròn có bán kính bằng

A. 2. B. $\sqrt{2}$. C. $\frac{\sqrt{35}}{2}$. D. 1.

MỨC ĐỘ: VẬN DỤNG CAO.

Câu 65: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;6)$. Điểm M thay đổi trên mặt phẳng (ABC) và N là điểm trên tia OM sao cho $OM.ON = 12$. Biết rằng khi M thay đổi, điểm N luôn thuộc một mặt cầu cố định. Tính bán kính của mặt cầu đó.

A. $\frac{7}{2}$ B. $3\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{3}$ D. $\frac{5}{2}$

Câu 66: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 4$ và các điểm $A(-2;0;-2\sqrt{2})$, $B(-4;-4;0)$. Biết rằng tập hợp các điểm M thuộc (S) và thỏa mãn $MA^2 + \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{MB} = 16$ là một đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó.

A. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{3\sqrt{7}}{4}$ D. $\frac{5}{2}$

Câu 67: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 5 điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;3;0)$, $C(2;3;-1)$, $D(3;2;5)$, $E(3;4;0)$. Tìm số mặt phẳng cách đều 5 điểm A, B, C, D, E .

A. 0. B. 3. C. 5. D. 1.

LOẠI 4. CÁC BÀI TOÁN CỰC TRỊ.

MỨC ĐỘ: THÔNG HIỂU.

Câu 68: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$ và hai điểm $A(0;-1;3)$, $B(1;-2;1)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho $MA^2 + 2MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M(5;2;-4)$ B. $M(-1;-1;-1)$ C. $M(1;0;-2)$ D. $M(3;1;-3)$

MỨC ĐỘ: VẬN DỤNG THẤP.

Câu 69: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho các điểm $A(4;2;5)$, $B(0;4;-3)$, $C(2;-3;7)$. Biết điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ nằm trên mặt phẳng Oxy sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng

$P = x_0 + y_0 + z_0$.

A. $P = -3$ B. $P = 0$ C. $P = 3$ D. $P = 6$

Câu 70: Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(1;2;3), B(0;1;0), C(1;0;-2)$. Điểm M thuộc mặt phẳng $(P): x+y+z+2=0$ sao cho giá trị của biểu thức $T = MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ nhỏ nhất. Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(Q): x+2y+2z-3=0$ bằng

- A. 24. B. $\frac{121}{54}$. C. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$. D. $\frac{101}{54}$.

Câu 71: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;-6;1)$ và mặt phẳng $(P): x+y+7=0$. Điểm B thay đổi thuộc Oz ; điểm C thay đổi thuộc mặt phẳng (P) . Biết rằng tam giác ABC có chu vi nhỏ nhất. Tọa độ điểm B là.

- A. $B(0;0;1)$. B. $B(0;0;-2)$. C. $B(0;0;-1)$. D. $B(0;0;2)$.

Câu 72: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(0;1;1), B(1;0;-3), C(-1;-2;-3)$ và mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z - 2 = 0$. Tìm điểm $D(x_D; y_D; z_D)$ thuộc (S) sao cho thể tích khối tứ diện $ABCD$ lớn nhất. Tính giá trị của $x_D + y_D + z_D$?

- A. 4. B. $\frac{3}{2}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{4}{3}$.

Câu 73 Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(m;0;0), B(0;2m+1;0), C(0;0;2m+5)$ khác O . Gọi D là một điểm nằm khác phía với O so với mặt phẳng (ABC) , sao cho tứ diện $ABCD$ có các cặp cạnh đối bằng nhau. Tìm khoảng cách ngắn nhất từ O đến tâm I mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

- A. $\sqrt{11}$. B. $\frac{\sqrt{10}}{2}$. C. $\sqrt{10}$ D. $\sqrt{6}$.

MỨC ĐỘ: VẬN DỤNG CAO.

Câu 74: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 8$ và hai điểm $A(4;4;3), B(1;1;1)$. Gọi (C) là tập hợp các điểm $M \in (S)$ để $|MA-2MB|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Biết rằng (C) là một đường tròn bán kính R . Tính R .

- A. $\sqrt{7}$. B. $\sqrt{6}$. C. $2\sqrt{2}$. D. $\sqrt{3}$.

Câu 75: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho $A(1;3;10), B(4;6;5)$ và M là điểm thay đổi trên mặt phẳng (Oxy) sao cho MA, MB cùng tạo với mặt phẳng (Oxy) các góc bằng nhau. Tính giá trị nhỏ nhất của AM .

- A. $6\sqrt{3}$ B. 10 C. $\sqrt{10}$ D. $8\sqrt{2}$

Câu 76: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;0;-1), B(-1;1;0), C(1;0;1)$. Tìm điểm M sao cho $3MA^2 + 2MB^2 - MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $M\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; -1\right)$. B. $M\left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; 2\right)$. C. $M\left(-\frac{3}{4}; \frac{3}{2}; -1\right)$. D. $M\left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; -1\right)$.